総合研究大学院大学複合科学研究科統計科学専攻博士課程（5年一貫制）

問題と解答

10年間13回分

あの *

2023年3月20日

目次

* e-mail address : anomath57@gmail.com
URL : https://anomath.com/

記法についての注意

次の記法は以後断りなく用いる．

(1) $n = 1, 2, \cdots$ について，

$$n := \{0, 1, 2, \cdots, n-1\},\ [n] := \{1, 2, \cdots, n\}.\ \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\},\ \mathbb{N}^+ := \mathbb{N}_{>0} = \{1, 2, 3, \cdots\}.$$

(2) 同様にして，$\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$，$\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$，$\overline{\mathbb{R}_+} := [0, \infty]$．

(3) $M_{mn}(\mathbb{R})$ で (m, n)-実正方行列の全体，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R}) := M_{nn}(\mathbb{R})$ で可逆な n 次正方行列の全体を表す．

(4) $I_d \in M_d(\mathbb{R})$ を d 次元単位行列，$O_d \in M_d(\mathbb{R})$ を d 次元零行列とする．

(5) $1_d \in \mathbb{R}^d$ を成分が全て 1 の d 次元ベクトル，$0_d \in \mathbb{R}^d$ を d 次元の零ベクトルとする．

(6) $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{C}$ で，行列 $A \in M_n(\mathbb{R})$ の固有値全体の集合を表す．

(7) $f(x) = O(x^n)\ (x \to 0)$ で $\limsup_{x \to 0} \left|\frac{f(x)}{x^n}\right| < \infty$ を表す．

(8) $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度を l，距離空間 S 上の Borel σ-代数を $\mathcal{B}(S)$ で表す．

(9) 1_A で集合 A の定義関数 $1_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A, \\ 0 & x \notin A. \end{cases}$ を表す．

(10) 確率変数 X, Y に対して，期待値を $E[X]$，分散を $\mathrm{Var}[X]$，共分散を $\mathrm{Cov}[X, Y]$ で表す．

(11) $\mathrm{U}(S)$ で集合 S 上の一様分布，$\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ で平均 μ 分散 σ^2 の正規分布を表す．

(12) $\mathrm{Exp}\ (\gamma)\ (\gamma > 0)$ で指数 γ の指数分布を表す 15.49．確率密度関数は $f(x) = \gamma e^{-\gamma x} 1_{\{x>0\}}$ である．

(13) $\mathrm{Gamma}(\alpha, \nu)$ で密度関数

$$g(x; \alpha, \nu) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \alpha^\nu x^{\nu-1} e^{-\alpha x} 1_{\{x>0\}}$$

で与えられる Gamma 分布 15.48 を表す．

(14) $\mathrm{Beta}(\alpha, \beta)$ で密度関数

$$f(x; \alpha, \beta) := \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} 1_{(0,1)}(x), \qquad B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx$$

で与えられる Beta 分布を表す．

問題文の表現は筆者の都合で一部変えています．過去に実施された入学試験問題は統計数理研究所 HP から見れます．

1　解題

試験概要

学生募集要項によれば，出題範囲は「線型代数，解析（微積分，確率など）」からなる，全 4 問構成，制限時間 2 時間の試験である．なお，今後 (2024 年度実施・2025 年度入学以降) は出題範囲が「線形代数，解析（微積分など），確率・統計」に変更される見通しである (参照).

特徴

難易度の幅が広く，「簡単な問題」あるいは「誘導付きの問題」は確実に点数に変えられることが合格の決め手になるだろう．

注意

2015 年度実施の 2 回，また 2014 年度以前実施分については，まったく出題者が違うと考えられ，問題傾向が大きく違う．そこで，以下の大問別出題傾向は主に 2016 年度から 2013 年度実施分について述べることとする．

大問別の典型的な構成

必ず 4 つの大問からなり，後ろの方が難易度があがる．それぞれは大まかに次のような出題傾向がある．

第 1 問　行列計算と微分．積分・極限の小問集合．特筆すべき頻出主題には Maclaurin 展開がある．

第 2 問　2,3 の小問からなる積分論の問題：1 つのトピックが通底しており，小問は互いに関連する．特に，前半の小問が解けなくても，後半もその内容を踏まえて解き得る問題が多い．

第 3 問　2,3 の小問からなる行列論の問題：多変量正規分布，Makov 連鎖，ブロック行列に関連する問題が出題されたことがある．

第 4 問　2,3 の小問からなる確率統計学の問題：直近では特定の分布を題材にして，密度を計算させる問題が頻出である (20 年，19 年は全て).

特に第 4 問において，順序統計量の分布，max によって構成される確率変数の分布に関する問題が，最高難易度の問題として出題されやすい．

主題別出題履歴

指数分布

- 23 年 1 月・第 4 問 2.4 は指数分布と正規分布の特性関数にまつわる問題．
- 21 年 1 月・第 4 問 4.4 は生存関数と順序統計量の分布の問題．
- 20 年 1 月・第 4 問 5.4 は指数分布の順序統計量の密度の問題．
- 19 年 8 月・第 4 問 6.4 は指数分布の商確率変数の密度計算問題．
- 17 年 8 月・第 4 問 10.4 は指数分布の独立和の累積分布関数の問題．

正規分布

- 23 年 1 月・第 4 問 2.4 は指数分布と正規分布の特性関数にまつわる問題．
- 21 年 8 月・第 3 問 3.3 は正規標本の標本平均と不偏分散との独立性を誘導付きで証明する問題．
- 19 年 1 月・第 4 問 7.4 は 2 次元正規分布の線型変換と商の密度を導出させる問題．
- 15 年 1 月・第 4 問 13.4 は正規分布確率変数の独立和に関する問題．

正規分布の派生分布

18 年 8 月・第 3 問 8.3 は χ^2-分布とその商確率変数が Beta 分布に従うことを密度を用いて議論させる問題．

確率密度の変換

- 20 年 1 月・第 4 問 5.4 は指数関数の順序統計量の密度．
- 2019 年 8 月・第 4 問 6.4 は指数分布の商確率変数の密度．
- 19 年 1 月・第 4 問 7.4 は正規分布を題材に，その線型変換と商の密度を導出させる問題．
- 18 年 8 月・第 3 問 8.3 は χ^2-分布の商確率変数が Beta 分布に従うことを密度を用いて計算させる．

行列の対角化

21 年 8 月・第 3 問 3.3.

射影行列

19 年 8 月・第 2 問 6.2 は射影行列の特徴付け 15.17 についての問題．

Toeplitz 行列

- 19 年 1 月・第 2 問 7.2 は中心化行列を題材とした固有値問題.
- 17 年 8 月・第 2 問 10.2 は Toeplitz 行列を題材にした行列計算問題.

常微分方程式

- 21 年 1 月・第 4 問 4.4 は指数分布の生存関数が満たす 1 階線型微分方程式が小問で出題.
- 19 年 8 月・第 3 問 6.3 は 1 階線型非斉次方程式の解法と数値近似.
- 17 年 8 月・第 3 問 10.3 は定数係数 2 元連立線型 1 階系 ODE の標準的な問題.

確率行列の極限・Markov 連鎖

- 21 年 8 月・第 4 問 3.4.
- 21 年 1 月・第 3 問 4.3：Markov 連鎖の収束.
- 2018 年 1 月・第 4 問 9.4：酔歩の解析.

Block 行列

- 23 年 1 月・第 3 問 2.3.
- 21 年 8 月・第 4 問 (1)3.4.
- 20 年 1 月・第 3 問 5.3.

一般化逆行列

21 年 1 月・第 1 問 (3)4.1.

関数の最適化

- 18 年 8 月・第 4 問 8.4.
- 18 年 1 月・第 3 問 9.3.

特別な対策は必要なく，とにかく問題文の言う通りの計算結果を出すことに集中するのが良いと思われる.

最小二乗法：$a - b^\top x$ という形の関数の評価

- 21 年 1 月・第 1 問 4.1.
- 18 年 8 月・第 4 問 8.4.
- 15 年 8 月・第 3 問 12.3.
- 15 年 1 月・第 3 問 13.3 は線型回帰模型の問題.

2　2023 年 1 月実施

概観

筆者が受験した年度の問題である．出題傾向は変わり，第 1 問は小問集合ではなく，他の大問と同様に 1 つの主題をいくつかの誘導をつけて扱う問題となった． 4 つの問題いずれも前半の小問の誘導としての意味が強くなり，うまく前半の問題で示した結果を使うことが極めて肝要になる.

第 1 問　一般の行列のその転置との性質に関する証明問題.
第 2 問　定積分に関する問題が続く．最後の問題が難関.
第 3 問　ブロック行列の対角化と可換性にまつわる問題.
第 4 問　指数分布と正規分布の特性関数にまつわる問題.

2.1　第一問

第 1 問

問題 2.1． $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ とする．$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA), (AB)^\top = B^\top A^\top$ は所与とする.

問 1　$\mathrm{tr}(AA^\top) = 0$ ならば $A = O$ であることを示せ.
問 2　$AA^\top = A^2$ ならば $AA^\top = (A^\top)^2$ であることを示せ.
問 3　$AA^\top - A^2 = O$ と $A^\top = A$ とは同値であることを示せ.

[解答例].

(1) Step1 $AA^\top$ の固有値がすべて零であることを示せばよい．すると $AA^\top = O$ がわかるが，このとき $A = O$ が必要である．実際，A のある成分が零でないとする．これを含む行を第 i 行とし，第 i 行を $a_i \in \mathbb{R}^n$ とベクトルで表すと，$A^\top A$ の第 (i,i)-成分は $a_i \cdot a_i \neq 0$ によって得られるから，$A^\top A = O$ に矛盾する．

Step2 まず，$(AA^\top)^\top = AA^\top$ より対称行列であるから，ある直交行列 $U \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ が存在して，$D := U^\top AA^\top U$ は対角行列となる．するとこのとき，$\mathrm{Tr}(D) = \mathrm{Tr}(U^\top AA^\top U) = \mathrm{Tr}((AA^\top U)U^\top) = \mathrm{Tr}(AA^\top) = 0$ であるから，$AA^\top$ の固有値の総和は零である．

Step3 さらに，任意の $x \in \mathbb{R}^n$ について $(AA^\top x|x) = (A^\top x|A^\top x) = \|A^\top x\|^2 \geqslant 0$ であるから，特に任意の固有値は非負である．

以上の 2 点から，$AA^\top$ の固有値はすべて零である．

(2) $AA^\top = AA$ の両辺の転置をとると，$AA^\top = A^\top A^\top = (A^\top)^2$.

(3) 問 2 の逆方向の議論もまったく同様に成り立つから，結局 $AA^\top - A^2 = O$ と $AA^\top - (A^\top)^2 = O$ とは同値．このとき，

$$(A - A^\top)(A - A^\top)^\top = (AA^\top - (A^\top)^2) - (AA^\top - A^2) = O$$

であるから，問 1 より，$A - A^\top = O$ が従う．逆の主張は，$A^\top = A$ の両辺に左から A を乗じることで従う．

■

2.2 第二問

第 2 問

問題 2.2 .

問 1 次の条件を満たす実数 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ を求めよ：

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{\alpha}{1+x} + \frac{\beta}{1-x}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

問 2 次の定積分を求めよ：

$$\int_0^{\pi/6} \frac{d\theta}{\cos^2\theta - \sin^2\theta}.$$

問 3 次の定積分を求めよ：

$$\iint_D e^{-\frac{3x^2-y^2}{2}} dxdy, \qquad D := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant y \leqslant x\right\}.$$

[解答例].

(1)

$$\frac{\alpha}{1+x} + \frac{\beta}{1-x} = \frac{(\alpha+\beta) + x(\beta-\alpha)}{1-x^2} = \frac{1}{1-x^2}$$

には，

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1, \\ \beta - \alpha = 0. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \beta = \frac{1}{2}$$

が必要十分である．

(2) $x := \tan\theta$ と置換することで，次のように計算できる：

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/6} \frac{d\theta}{\cos^2\theta - \sin^2\theta} &= \int_0^{\pi/6} \frac{1}{\cos^2\theta} \frac{d\theta}{1-\tan^2\theta} \\ &= \int_0^{1/2} \frac{dx}{1-x^2} \\ &= \frac{1}{2}\left[\log\frac{1+x}{1-x}\right]_0^{1/2} = \frac{1}{2}\log 3. \end{aligned}$$

(3)

■

注意. 問 3 は筆者には解けていません.

2.3 第三問

第 3 問

問題 2.3 .

問 1 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ が同時対角化可能であるならば，$AB = BA$ であることを示せ.

問 2 次の行列 $C, D \in M_{n+m}(\mathbb{R})$ について，$CD = DC$ であることと $C_{12} = O_{m,n}, C_{21} = O_{n,m}$ であることとが同値であることを示せ：

$$C := \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}, \quad D := \begin{pmatrix} \lambda I_m & O_{m,n} \\ O_{n,m} & \mu I_n \end{pmatrix}, \qquad \mu \neq \lambda, C_{11} \in M_m(\mathbb{R}), C_{22} \in M_n(\mathbb{R}), C_{12}, C_{21}^\top \in M_{mn}(\mathbb{R}).$$

問 3 次の $C \in M_{n+m}(\mathbb{R})$ について，C が対角化可能であることの必要十分条件は，C_{11}, C_{22} がそれぞれ対角化可能であることであることを示せ：

$$C := \begin{pmatrix} C_{11} & O_{m,n} \\ O_{n,m} & C_{22} \end{pmatrix}, \qquad C_{11} \in M_m(\mathbb{R}), C_{22} \in M_n(\mathbb{R}).$$

問 4 $A, B \in M_{n+m}(\mathbb{R})$ はいずれも対角化可能で，次の 2 条件を満たすとする：

(a) $AB = BA$.

(b) A はある正則行列 $P \in \mathrm{GL}_{n+m}(\mathbb{R})$ によって，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda I_m & O_{m,n} \\ O_{n,m} & \mu I_n \end{pmatrix}, \qquad \lambda \neq \mu.$$

と対角化される.

このとき，A, B は同時対角化可能であることを示せ.

[解答例].

(1) A, B は同時対角化可能であるから，ある $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ が存在して，

$$P^{-1}AP, \quad P^{-1}BP$$

はいずれも対角行列になる．対角行列は互いに可換であるから，

$$(P^{-1}AP)(P^{-1}BP) = P^{-1}ABP = P^{-1}BAP = (P^{-1}BP)(P^{-1}AP).$$

中央の等式について，両辺に左から P，右から P^{-1} を乗じると $AB = BA$ を得る.

(2) いま，

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda I_m & O_{m,n} \\ O_{n,m} & \mu I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda C_{11} & \mu C_{12} \\ \lambda C_{21} & \mu C_{22} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} \lambda I_m & O_{m,n} \\ O_{n,m} & \mu I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda C_{11} & \lambda C_{12} \\ \mu C_{21} & \mu C_{22} \end{pmatrix}.$$

であるから，$CD = DC$ であることは，

$$\begin{cases} \mu C_{12} = \lambda C_{12}, \\ \mu C_{21} = \lambda C_{21}. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (\mu - \lambda) C_{12} = O, \\ (\mu - \lambda) C_{21} = O. \end{cases}$$

に同値．いま $\mu \neq \lambda$ より，両辺を $\mu - \lambda$ で割ることで，これは $C_{12} = C_{21} = O$ に同値.

(3) **十分性**　C_{11}, C_{22} がいずれも対角化可能であるとき，ある $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), Q \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{R})$ が存在して，

$$Q^{-1}C_{11}Q, \quad P^{-1}C_{22}P$$

はいずれも対角行列である．このとき，$R := \mathrm{diag}(Q, P) \in \mathrm{GL}_{n+m}(\mathbb{R})$ も可逆であることが $R^{-1} = \mathrm{diag}(Q^{-1}, P^{-1})$ であることからわかり，

$$R^{-1}CR = \mathrm{diag} Q^{-1}C_{11}Q, P^{-1}C_{22}P$$

と対角化される．

必要性　C は対角化可能であるとする．

$$C^n = \begin{pmatrix} C_{11}^n & \\ & C_{22}^n \end{pmatrix}$$

であることより，C の最小多項式は C_{11}, C_{22} の最小多項式の最小公倍式となっている．したがって，C の最小多項式が相異なる一次式の積に分解されるとき，C_{11}, C_{22} もそうである．よって，C_{11}, C_{22} も対角化可能である．

(4) 条件 (a) が成り立つとき，実は $P^{-1}AP, P^{-1}BP$ も可換である：

$$(P^{-1}AP)(P^{-1}BP) = P^{-1}ABP = P^{-1}BAP = (P^{-1}BP)(P^{-1}AP).$$

すると問 2 の結果より，$P^{-1}BP$ も対角行列である．

■

注意. (1) の条件 $AB = BA$ は実は同時対角化可能性の十分条件とはなりえず，あと A, B が正規行列であることが必要である．

2.4　第四問

第 4 問

問題 2.4 . $X \sim \mathrm{Exp}\,(1), Y \sim \mathrm{N}(0,1)$ とする．必要ならば，Y の分布関数

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

を解答に用いてよい．

問 1　任意の $y \in \mathbb{R}$ に対して，$E[\cos(Xy)], E[\sin(Xy)]$ を求めよ．

問 2　任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して，$E[\cos(xY)], E[\sin(xY)]$ を求めよ．

問 3　次の値を求めよ：

$$M := E\left[\frac{Y^2}{1+Y^2}\right].$$

[解答例]. Exp (1) の密度関数を

$$g(t) := e^{-t}1_{(0,\infty)}(t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

N(0, 1) の密度関数を

$$\phi(z) := \Phi'(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, \qquad z \in \mathbb{R}.$$

で表す．

(1) Exp (1) の特性関数は，

$$\begin{aligned} E[e^{iXy}] &= \int_0^\infty e^{ity} g(t)dt = \int_0^\infty e^{t(iy-1)}dt \\ &= \left[-\frac{e^{t(iy-1)}}{1-iy} \right]_0^\infty = \frac{1}{1-iy} = \frac{1}{1+y^2} + i\frac{y}{1+y^2}. \end{aligned}$$

いま，$E[\cos(Xy)], E[\sin(Xy)]$ はそれぞれ $E[e^{iXy}]$ の実部と虚部であるから，それぞれを比較して，

$$\begin{cases} E[\cos(Xy)] = \dfrac{1}{1+y^2}, \\ E[\sin(Xy)] = \dfrac{y}{1+y^2}. \end{cases}$$

(2) $N(0,1)$ の特性関数は，

$$\begin{aligned} E[e^{ixY}] &= \int_{\mathbb{R}} e^{ixz}\phi(z)dz = \int_{\mathbb{R}} e^{ixz-\frac{z^2}{2}}dz \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(z-ix)^2}{2}-\frac{x^2}{2}}dz = e^{-\frac{x^2}{2}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(z-ix)^2}{z}}dz = e^{-\frac{x^2}{2}}. \end{aligned}$$

最後の積分は，$e^{-\frac{z^2}{2}}$ の $\mathbb{C}^2$ 上の直線 $\mathrm{Im}\, z = -x$ 上での積分に等しいが，これが実軸上での積分に等しい理由は，$x > 0$ のときは長方形領域 $[-L, L] \times [-x, 0]$ を考え，その左右の端 $\partial[-L, L] \times [-x, 0]$ 上での積分は $L \to \infty$ の極限で 0 に収束することによる．以上より，問 1 と同様に左辺と右辺を比較して，

$$\begin{cases} E[\cos(xY)] = e^{-\frac{x^2}{2}}, \\ E[\sin(xY)] = 0. \end{cases}$$

(3) 問 1, 問 2 の結果と Fubini の定理より，次のように計算できる：

$$\begin{aligned} M = E\left[\frac{Y^2}{1+Y^2}\right] &= 1 - E\left[\frac{1}{1+Y^2}\right] \\ &= 1 - \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+z^2}\phi(z)dz \\ &= 1 - \int_{\mathbb{R}}\int_0^\infty \cos(zt)g(t)\phi(z)dtdz \\ &= 1 - \int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}g(t)dt \\ &= 1 - \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}(t+1)^2}e^{\frac{1}{2}}dt \\ &= 1 - e^{\frac{1}{2}}\int_1^\infty e^{-\frac{s^2}{2}}ds = 1 - e^{\frac{1}{2}}\Phi(-1). \end{aligned}$$

■

3　2021 年 8 月実施

第 1 問　第 1 問 (3) は骨のある積分問題であったが，行列計算・積分・Maclaurin 展開というメニューは変わらない．
第 2 問　Laplace 変換を題材にした簡単な積分計算問題．
第 3 問　標本平均と標本分散が独立であること (さらに言えば Cochran の定理の証明) を題材とした，高度な線型代数への練度を必要とする問題であった．正面から解くには対称行列の対角化の理論が必要．
第 4 問　Markov 連鎖を与え，その確率行列の収束を議論させる問題であるが，誘導に乗れれば問題ない．

3.1　第一問

第 1 問

問題 3.1．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

(2) 次の行列 $A, B \in M_3(\mathbb{R})$ が $S \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ に対して $B = S^{-1}AS$ を満たすとき，$S = (s_{ij})_{i,j\in[3]}$ の必要条件を求めよ：

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(3) $a, b, c \sim U([0,1])$ を独立確率変数とする．$ax^2 + bx + c = 0$ が実数解を持つ確率を求めよ．

[解答例].

(1) Taylor の定理より，$\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + O(x^4)\ (x \to 0)$．よって，

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{2} + O(x^2)\right) = \frac{1}{2}.$$

(2) 同値な等式 $SB = AS$ は成分毎に表すと

$$\begin{bmatrix} 0 & s_{12} & 2s_{13} \\ 0 & s_{22} & 2s_{23} \\ 0 & s_{32} & 2s_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2s_{31} & 2s_{32} & 2s_{33} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ 2s_{31} & 2s_{32} & 2s_{33} \end{bmatrix}.$$

これを解いて，

$$s_{12} = s_{21} = s_{23} = s_{31} = s_{32} = 0,\ s_{13} = s_{33}.$$

換言すれば，

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \quad (a, b, c \in \mathbb{R})$$

と表せることが必要．

(3) $ax^2 + bx + c = 0$ が実解を持つことは，$a = 0 \land (b \neq 0 \lor c = 0)$ または $a \neq 0 \land (b^2 - 4ac \geqslant 0)$ に同値．$U([0,1]^3)$ は $[0,1]^3$ 上の Lebesgue 測度に等しいから，集合

$$\left\{(a,b,c) \in [0,1]^3 \mid a = 0 \land (b \neq 0 \lor c = 0)\right\} \cup \left\{(a,b,c) \in [0,1]^3 \mid a \neq 0 \land (b^2 - 4ac \geqslant 0)\right\} =: A \cup B$$

の体積を求めれば良い．前者の集合 $A = \left\{(a,b,c)^3 \in [0,1]^3 \mid a = 0 \land (b \neq 0 \lor c = 0)\right\}$ は体積 0 である．一方で，任意に固定した $a \in [0,1]$ に対して，

$$l\left(\left\{(b,c) \in [0,1]^2 \mid 4ac \leqslant b^2\right\}\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{4a}\displaystyle\int_0^{2\sqrt{a}} b^2 db + (1 - 2\sqrt{a}) & \dfrac{1}{4a} \geqslant 1, \\ \dfrac{1}{4a}\displaystyle\int_0^1 b^2 db & \dfrac{1}{4a} \leqslant 1. \end{cases}$$

であるから，

$$\begin{aligned} l(B) &= \int_0^{1/4} \left(1 - \frac{4}{3}\sqrt{a}\right) da + \int_{1/4}^1 \frac{1}{12a} da \\ &= \left[a - \frac{8}{9}a\right]_0^{1/4} + \frac{1}{12}\Big[\log a\Big]_{1/4}^1 = \frac{1}{36}(5 + 6\log 2) \approx 25\% \end{aligned}$$

■

3.2 第二問

第 2 問

問題 3.2．$f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ に対して，

$$F(s) := \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt \quad (s > 0)$$

を Laplace 変換といい，$\mathcal{L}[f] := F$ とも表す．

(1) $a \geqslant 0$ について，$\mathcal{L}[e^{-at}]$ を求めよ．

(2) $\forall_{a\geqslant 0}\,\forall_{s>0}\ \mathcal{L}[e^{-at}f(t)](s) = F(s+a)$ を示せ．

(3) $\forall_{n\in\mathbb{N}}\,\forall_{s>0}\ \mathcal{L}[t^n](s) = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$ を示せ．

[解答例].

(1) 計算過程は次のようになる：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[e^{-at}](s) &= \int_0^\infty e^{-at}e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{-(a+s)t}dt \\ &= \left[-\frac{e^{-(a+s)t}}{a+s}\right]_0^\infty = \frac{1}{a+s}.\end{aligned}$$

(2) 任意の $a>0, s>0$ について，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[e^{-at}f(t)](s) &= \int_0^\infty e^{-at}f(t)e^{-st}dt \\ &= \int_0^\infty f(t)e^{-(a+s)t}dt = F(s+a) = \mathcal{L}[f](s+a).\end{aligned}$$

(3) $n=0$ のとき，

$$\mathcal{L}[1](s) = \int_0^\infty e^{-st}dt = \left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]_0^\infty = \frac{1}{s}.$$

$n>0$ のとき，

$$\mathcal{L}[t^n](s) = \int_0^\infty t^n e^{-st}dt = \left[-\frac{e^{-st}}{s}t^n\right]_0^\infty + \frac{n}{s}\int_0^\infty t^{n-1}e^{-st}dt = \frac{n}{s}\mathcal{L}[t^{n-1}](s).$$

であるが，帰納法の仮定より右辺は $\dfrac{n}{s}\dfrac{(n-1)!}{s^n} = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$ に等しい．

■

3.3 第三問

第 3 問

問題 3.3． $X_1,\cdots,X_n \sim \mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$ を独立同分布列，$x := (X_1,\cdots,X_n)^\top$ とする．

(1) $B\in M_{mn}(\mathbb{R}), A\in M_n(\mathbb{R})$ を対称行列とする．$BA=O$ のとき，2 つの確率変数 Bx と $x^\top Ax$ とは独立になることを示せ．

(2) 標本平均 $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^n X_i$ と標本分散 $S^2 = \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^n (X_i - X)^2$ が独立であることを示せ．

[解答例].

(1) A は対称行列だから，ある直交行列 $U\in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}), U^\top U = I_n$ を用いて，$U^\top DU = A$ と対角化出来る．よって，$y := Ux \in \mathbb{R}^n$ と定めると，これは再び独立な正規確率変数のベクトル $y \sim \mathrm{N}(\mu U1_n, \sigma^2 I_n)$ で，

$$x^\top Ax = (Ux)^\top D(Ux) = a_1y_1^2 + \cdots + a_ry_r^2, \qquad r := \operatorname{rank} A, D =: \operatorname{diag}(a_1,\cdots,a_r)$$

と表せる．次に，$BA=0$ より，$\operatorname{Im} A\subset \operatorname{Ker} B$ すなわち $\operatorname{Im} B\subset \operatorname{Ker} A$ であるから，Bx は $y_{r+1},\cdots,y_n$ のみによって表せる確率変数のベクトルである (使わないものもあるかもしれないが)．よって，Bx と $x^\top Ax$ は独立．

(2) $m=1, B := \frac{1}{n}1_n^\top$ と

$$A := \frac{1}{n-1}\begin{pmatrix} 1-\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & 1-\frac{1}{n} \end{pmatrix}^2 =: \frac{1}{n-1}\Lambda^2$$

と定めると，$B\Lambda = O$ より，$BA = O$ であり，同時に $\overline{X} = Bx$ かつ $S^2 = x^\top Ax$ である．

■

要諦. (1) の事実は $B := \frac{bb^\top}{\|b\|^2}$ を射影行列とし，

$$X^\top AX \perp\!\!\!\perp b^\top X \Leftrightarrow X^\top AX \perp\!\!\!\perp X^\top BX$$

に注意すれば，射影子の特徴付け 15.17 と Fisher-Cochran の定理 15.21 からすぐに従う．また，Basu の定理からも従う 15.41．(2) の独立な標本の標本平均と標本分散が独立であるという事実は，標本が正規分布に従っているという事実を特徴付ける [Kawata and Sakamoto, 1949].

3.4 第四問

第 4 問

問題 3.4 .

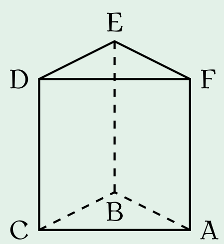
(1) $I_d - R \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$ を満たす $R, L \in M_d(\mathbb{R})$ を用いて，

$$M = \begin{pmatrix} I_d & O_d \\ L & R \end{pmatrix} \quad L, R \in M_d(\mathbb{R})$$

と表せるとする．このとき，次を示せ：

$$\forall_{n\in\mathbb{N}^+} \quad M^n = \begin{pmatrix} I_d & O_d \\ (I_d - R^n)(I_d - R)^{-1}L & R^n \end{pmatrix}.$$

(2) 次図の三角柱の頂点を移動する一匹の蟻を考える．頂点 DEF のいずれかから等確率でスタートし，三角柱の頂点を移動し，頂点 A,B,C のいずれかに達したら，そこから他の頂点には動かないものとする．蟻が頂点 D にいるときに，次の時刻に頂点 A,B,C,D,E,F に移動する確率はそれぞれ $\left(\frac{2}{5}, 0, 0, \frac{2}{5}, 0, \frac{1}{5}\right)$，蟻が頂点 E にいるときに，次の時刻に頂点 A,B,C,D,E,F に移動する確率はそれぞれ $\left(0, \frac{2}{5}, 0, 0, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$，蟻が頂点 F にいるときに，次の時刻に頂点 A,B,C,D,E,F に移動する確率はそれぞれ $\left(0, 0, \frac{3}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, 0\right)$ であるとする．



移動開始からの経過時刻を n として，$n \to \infty$ の極限において，頂点 A にいる蟻が頂点 D からスタートした確率を求めよ．必要ならば，次を使って良い：

実対称行列に対するゲルシュゴリンの定理

n 次実対称行列 $M = (M_{ij})_{i,j\in[n]}$ の i 行目の対角要素 M_{ii} 以外の絶対値の和を M_i とする．

$$M_i := \sum_{k=1, k\neq i}^{n} |M_{ik}|, \quad D_i := \{z \in \mathbb{R} \mid |z - M_{ii}| \leqslant M_i\}$$

に対して，M の任意の固有値は D_i $(i = 1, \cdots, n)$ のいずれかの内に存在する．

[解答例]．

(1) $n = 1$ のとき，成立は明らか．$n > 1$ のとき，

$$M^{n-1} = \begin{pmatrix} I_d & O_d \\ (I_d - R^{n-1})(I_d - R)^{-1}L & R^{n-1} \end{pmatrix}$$

を認めると，

$$\begin{aligned} M^n = M^{n-1}M &= \begin{pmatrix} I_d & O_d \\ (I_d - R^{n-1})(I_d - R)^{-1}L & R^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_d & O_d \\ L & R \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I_d & O_d \\ (I_d - R^{n})(I_d - R)^{-1}L & R^{n} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

ただし左下成分については，

$$(I_d - R^{n-1})(I_d - R^{-1})^{-1}L + R^{n-1}L = \Big((I_d - R^{n-1})(I_d - R^{-1})^{-1} + (R^{n-1} - R^n)(I_d - R^{-1})^{-1}\Big)L = (I_d - R^n)(I_d - R)^{-1}L$$

と計算出来る．

(2) 与えられた Markov 過程は，初期分布を $\left(0, 0, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ とし，遷移行列を

$$A := \begin{pmatrix} I_3 & O_3 \\ L & R \end{pmatrix}, \quad L := \frac{1}{5}\mathrm{diag}(2, 2, 3), \quad R := \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

とするものである．R は対称行列であるから，Gershgorin の定理から，M の任意の固有値は $\left(-\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right)$ に含まれる．特に，$\lim_{n\to\infty} R^n = O_3$ である．(1) と併せると，

$$\lim_{n\to\infty} A^n = \begin{pmatrix} I_3 & O_3 \\ (I_3 - R)^{-1}L & O_3 \end{pmatrix}, \quad (I_3 - R)^{-1}L = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 3 \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 3 \\ 2 & 2 & 9 \end{pmatrix}.$$

以上より，

$$\frac{\frac{4}{3}}{\frac{4}{3} + \frac{2}{3} + 2} = \frac{1}{3}.$$

■

4 2021 年 1 月実施

概観

第 1 問 行列計算，微分は良いが，(3) は一般可逆行列を題材にした骨のある線型代数の問題．

第 2 問 重積分の変数変換を用いた求積を題材とした簡単な計算問題．

第 3 問 単純な Markov 連鎖についてその不変分布を求めさせる問題．

第 4 問 指数分布を題材にして，その無記憶性と，関連する確率変数の分布同等性を証明させる小問集合である．